サイクル量子論

栗原和明

もう2年間もサイクリングと言えるようなことをしてないから、部誌の原稿を書けといっても困ってしまう。何を書いたらいいのか、ひじょうに考えた結果、次のようなバカな考えが思いついたので、それを書くことにしよう。

最近、チャリンコに乗るのがかったるくなってきたが、チャリンコに乗るためには、チャリンコに乗りたいという精神波（これをサイクロン（cyclon）と名づける）が、これをさえぎるポテンシャルの壁を乗りこえるか、または、通りぬけて来て、しかも十分な振幅を持つ場合に、チャリンコに乗るという行いにつながるのである。このことを次のようなモデルで考えてみよう。

「チャリンコに乗ろうかな」と思っているときの精神場を1図にあらわす。ポテンシャルの壁として高さU、厚さbなる四角形を考える。cyclonがⅠの領域のx軸の負の方向から、ポテンシャルの壁にむかって入射するとき、どれだけⅢの領域に透過して行くかを計算する。なお cyclon には Schrödinger 方程式が適用でき、ポテンシャルの壁は、高さUに関しては

$$U = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 \qquad ①$$

U_1 － チャリンコに乗っているときに横に帰り
抜けの苦しさに関する量

U_2 － サイクリングにかかる費用に関する量

U_3 － ひざのいたみに対する恐怖心に関する量

U_4 － その他

また、厚さ b は

b － 何か、行動を起こす場合のかったるさに
関する量

cyclon は時間に関して変化するが、簡単にするために時間に関して不変（定常状態）とすると、1次元の Schrödinger 方程式は

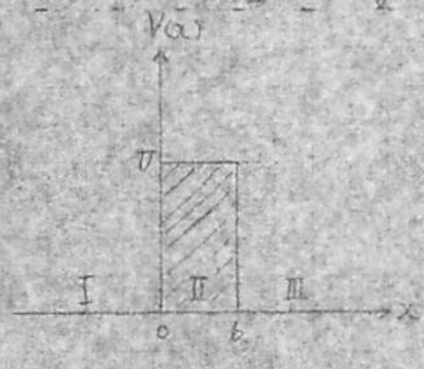
$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+\frac{2m}{\hbar^2}[E-V(x)]\psi(x)=0 \quad ②$$

$\psi(x)$　cyclon の波動関数

m　cyclon の質量

$\hbar = h/2\pi$

E　cyclon のエネルギー



$V(x)=0$　（Iの領域　$x<0$）

$V(x)=V$　（II 〃　$0<x<b$）

$V(x)=0$　（III 〃　$b<x$）

図1

$$\psi(x) = A\exp(ikx)$$

とおけば

$$-k^2 + \frac{2m}{\hbar^2}(E-V) = 0$$

$$k^2 = \frac{2m(E-V)}{\hbar^2} \quad \text{③}$$

①、③より1図の I, II, III の領域の Schrödinger 方程式は

$$\text{I, III} \quad \frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi = 0, \quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \quad \text{④}$$

$$\text{II} \quad \frac{d^2\psi}{dx^2} + k'^2\psi = 0 \quad k'^2 = \frac{2m(E-V)}{\hbar^2} \quad \text{⑤}$$

I では入射波（x 正の方向）と I, II 境界での反射波（x 負の方向）がある。入射波の振幅を1とすれば、I における波は

$$\psi_1 = \exp(ikx) + B\exp(-ikx) \quad \text{⑥}$$

II における波は

$$\psi_2 = B'\exp(ik'x) + C'\exp(-ik'x) \quad \text{⑦}$$

III では x 負の方向の波はないから

$$\psi_3 = C\exp(ikx) \quad \text{⑧}$$

ψ_1, ψ_2, ψ_3 は $x = 0, b$ で連続でなくてはならないので境界条件は

$$x=0 \text{ で} \quad \left.\begin{aligned} \psi_1 &= \psi_2 \\ \frac{d\psi_1}{dx} &= \frac{d\psi_2}{dx} \end{aligned}\right\} \quad \text{⑨}$$

$$x=b \text{ で} \quad \begin{aligned} \psi_2 &= \psi_3 \\ \frac{d\psi_2}{dx} &= \frac{d\psi_3}{dx} \end{aligned} \quad \text{⑩}$$

⑥⑦⑧を⑨⑩に代入すると

⑥⑦⑩より
$$\left.\begin{aligned} 1+B &= B'+C' \\ k(1-B) &= k'(B'-C') \end{aligned}\right\} \qquad ⑪$$

⑦⑧⑩より
$$\left.\begin{aligned} C\exp(ikb) &= B'\exp(ik'b)+C'\exp(-ik'b) \\ kC\exp(ikb) &= k'B'\exp(ik'b)-k'C'\exp(-ik'b) \end{aligned}\right\} \qquad ⑫$$

⑪⑫より反射波の振幅B、透過波の振幅Cを求めると

$$\left.\begin{aligned} B &= \frac{(k^2-k'^2)\{\exp(-2ik'b)-1\}}{(k+k')^2\exp(-2ik'b)-(k'-k)^2} \\ C &= \frac{4kk'\exp\{-i(k+k')b\}}{(k+k')^2\exp(-2ik'b)-(k'-k)^2} \end{aligned}\right\} \qquad ⑬$$

⑬より透過率Tを求める。

1) $E>V$ のとき

k, k' ＝ 実数

$$\begin{aligned} T &= CC^* \\ &= \frac{4k^2k'^2\operatorname{cosec}^2 k'b}{(k^2-k'^2)^2+4k^2k'^2\operatorname{cosec}^2 k'b} \end{aligned} \qquad ⑭$$

⑭において $k'b=n\pi$ では $T=1$ となるが $k'b=(n+\frac{1}{2}\pi)$ のとき

$$T_{min}=\frac{4k^2k'^2}{(k^2+k'^2)^2} \qquad ⑮$$

となり、最小値をとる。

ここで、④⑤を思い出して見よう。

$E\gg V$ のとき　④⑤より　$k^2 \doteqdot k'^2$

$$\therefore T_{min} = 1$$

$E \fallingdotseq U$ のとき　　$k'^2 = 0$

$\therefore T_{min} = 0$

つまり、チャリンコにのりたいという精神波(cyclon)のエネルギーが、それをこばむ障壁の高さより十分大きい場合、その障壁をものともせずに通りぬけ、チャリンコにのるという行為につながるが、cyclonのエネルギーが壁の高さとほぼ同じ位の場合は、チャリンコにのるかどうかは、その時のかったるさbによって決まるのである。

ii) $E < U$ のとき

⑮より、$k'^2 < 0$ となり、k'は虚数となるので、次のように実数Kでおきかえる

$$k'^2 = -K^2$$

$$\therefore K^2 = \frac{2m(U-E)}{\hbar^2} \qquad ⑯$$

$$T = CC^*$$

$$\therefore T = \frac{8k'^2K^2}{(k'^2+K^2)\{\exp Kb - \exp(-Kb)\} + 8k'^2K^2} \qquad ⑰$$

⑰よりわかることは、$E < U$であっても透過率Tは0にならない。つまり、たとえば、次の休みにフリーランに行こうかなと思ってきてそのcyclonのエネルギーがフリーランに行くときこばむポテンシャルより小さい場合、その日に絶対チャリンコに乗らないというのではなく、家のまわりをちんたらチャリンコで散歩する、というようなことになるのである。

と、まあ、あほなこと書いたが、部誌にこんなこと書いていいのかな?